數學傳播 49卷3期, pp. 3-14

# 有朋自遠方來——專訪 Claire Voisin 教授

策　劃 : 劉太平
訪　問 : 李元斌、林學庸
時　間 : 民國 113 年 12 月 5 日
地　點 : 中央研究院數學研究所
整　理 : 編輯室

Claire Voisin, 生於1962年3月4日, 是一位卓越傑出的法國數學家。她專長於代數幾何, 被公認爲該領域的國際頂尖學者。

在職業生涯中, Voisin 對代數幾何及多個相關的關鍵領域做出了重大貢獻, 包括小平 (Kodaira) 問題、代數閉鏈 (algebraic cycles)、霍奇猜想、Green 猜想、有理性 (rationality) 問題和鏡像對稱性。

她的傑出工作獲得了眾多著名獎項的認可, 包括歐洲數學會獎 (1992 年)、Ruth Lyttle Satter 獎 (2007 年)、Clay 研究獎 (2008 年)、CNRS 金獎 (2016 年)、邵逸夫獎 (2017 年) 和 Crafoord 獎 (2024 年)。

除獲頒多項榮譽外, Voisin 於 1994 年應邀在國際數學家大會 (ICM) 上發表演講, 並於 2010 年擔任專題演講者。她於 2015 年至 2020 年擔任法蘭西公學院代數幾何主任。憑藉其卓越貢獻, 她榮膺法國科學院、倫敦皇家學會和美國國家科學院等多所備受尊崇的科學機構的院士。

李元斌 (以下簡稱「李」): Claire, 感謝你接受我們的訪談邀請。我理解這一週對你來說比較辛苦, 還有時差的影響。

林學庸 (以下簡稱「林」): 你看起來比 Claire 還緊張。

李: Claire, 請你先爲我們的讀者做個自我介紹。特別是, 能否告訴我們你爲什麼選擇成爲一名數學研究學者, 是什麼影響了你的決定?

Claire Voisin (以下簡稱「V」): 我是 Claire Voisin, 今年 62 歲, 研究代數幾何。自 1986 年起, 我一直在法國國家科學研究中心 CNRS 工作。事實上, 我非常幸運, 24 歲時就獲得這個職位, 從那時起在 CNRS 擔任全職研究員。我的職業生涯主要在這個機構度過, 除了有四年擔任法蘭西公學院 (Collège de France) 教授, 時間是從 2016 年到 2020 年。事實上, 法蘭西公學院是一個備受尊崇的著名機構。法國人對它感到非常自豪, 因爲它具有悠久的歷史, 成立於 16 世紀, 由國王弗朗索瓦一世 (François I) 創立。法蘭西公學院成立於這個被稱爲人文主義時代的非凡時期, 當時學術生活最受尊崇。法蘭西公學院是一所非常優美的機構; 當我被延攬到那裡時, 我感到非常自豪和榮幸。但我必須說, 過了一段時間, 我覺得這絕對不適合我。

李: 爲什麼呢?

V: 也許主要是因爲 CNRS 是一個大型機構, 你隱身其中, 只是一個員工編號。對我來說, 如此默默無聞更有利於進行數學研究。在法蘭西公學院期間, 我受到較多關注。必須接受訪談, 也必須承受自己是一個重要人物的感覺。我無力承擔。最後我覺得默默無聞會較好一些。所以我決定離開法蘭西公學院。離開這個尊貴職位的決定, 並不很容易。但我毫不後悔, 因爲回到 CNRS 後, 我感覺好多了。我做出很好的數學工作, 因此並不後悔。除這段插曲之外, 我的職業生涯是完全線性的, 在工作崗位上逐步晉陞。

談到我如何學習數學, 法國的制度有一些優勢, 我不必在較早階段就做出選擇。而且我成長在一個相對安逸的時期, 當時我們這些年輕人並不太擔心自己的未來。我從未自問將來要做什麼。在整個學習過程中, 我始終追隨我的興趣。我相信這是可能的, 因爲這個教育系統對我來說效果很好。

17 歲時, 我獲得獎學金, 離開了家。我父親是一名工程師, 大約在 1973 年失業, 因此家裡經濟狀況不很寬裕。而且家裡有 12 個孩子, 生活不很容易。因爲這個原因, 我獲得了獎學金; 這對我來說非常好, 因爲我完全可以自由地做我喜歡的事情, 不必向父母要錢。拿著獎學金, 我去了高等學院預備班 (classes préparatoires), 而後進入了高等師範學院 (École Normale Supérieure), 在法國的高等學院求學期間拿到微薄的薪水。雖然薪水不高, 但已經算豐厚了, 因爲這意味著「我們樂見你學習, 請盡力而爲」。因此我總感覺到能夠自由地追隨自己的興趣。在預備班期間, 我發現了非常認真的數學。預備班的教學非常好, 且十分扎實。然而, 從深度、創造力或整體思路的角度來看, 仍然存在太多既有的思考方式; 學生必須學會應用一定數量的工具來做習題、學習定理。對我來說, 預備班教的內容還可以, 但我沒有看到它的深度, 也不知如何將之內化。那時我並不知道自己想成爲數學家。但我確實喜

歡數學, 也很擅長數學。進入高等師範學院後, 我想學哲學, 因爲我認爲這能對更深層的生活有更深刻的洞見。不過最後, 隨著數學做得越多, 你就會真正體會到其中的思想是多麼深刻, 並理解定義本質上的重要性。而且, 整個知識建構是非常深奧的, 你也會發現自己的心智完全投入其中。我想說的是, 在某個階段以前, 這一切主要只是關於「我擅長這個」, 擅長讀書, 然後做我應該做的事。但到了後來, 越來越多的是在發現那些美麗的思想。所以我不會說有哪個明確的時刻我告訴自己「現在我想成爲一位數學家」, 而是我越來越感興趣, 而且完全沒有任何障礙 — 因爲在高等師範學院, 我有薪水可領。之後, 很快我又得到了法國國家科學研究中心 CNRS 的職位, 所以我從來不需要去問「我要成爲什麼」。在我提出這個問題之前, 我已經入行了。

李: 如果我沒理解錯的話, 你進入高等師範學院時, 考慮過研究哲學。隨後, 在那段時間裡, 你日益深入思考數學, 並且自發地探索數學。

V: 完全正確。在某個時候, 我認爲數學是一種有限的結構, 也許就像西洋棋一樣。不過我對任何類型的遊戲都完全不感興趣。我是一個非常嚴肅的人。我真正更感興趣的是大腦如何產生抽象概念。所以我真的想親手觸及那個思想的源頭, 以及數學是如何被教授的。

李: 根據我的了解, 與其他文化相比, 數學在法國享有較高的地位。是否如此? 我認識一位法國工程師, 他原本想成爲數學家, 但是他放棄了數學而選擇工程學, 因爲他認爲自己不夠優秀。他說如果有機會, 他會非常願意從事數學研究, 並向我保證, 這是大多數法國人的普遍態度。

V: 確實如此, 但同時, 這是一個非常微妙的話題。也許你不讀《世界報》。他們最近刊出一篇報導, 指出法國孩子在學校數學成績排名墊底。

李: 了解。

V: 我們也許不是最後一名, 但在經濟合作暨發展組織 (OECD) 的富裕國家中, 我們的表現非常糟糕。這是一個重大問題, 因爲我們同時擁有高水準的數學傳統, 而且就國家規模而言, 有許多菲爾茲獎得主。我從經驗得知, 預備班的教學非常出色; 法國確實可以培養出卓越的數學家。同時, 如果你考慮到高中以及以下學校的情況, 我必須指出, 情況近乎災難。

李: 這種現象是最近才開始發生的嗎?

V: 在同一篇報導中, 他們藉由二階導數的論點論證說, 我們的衰落開始朝向 ……

林: 達到底限?

V: 我們目前的處境非常糟糕。我認爲這個問題已經存在至少二十年, 甚至可能三十年了。我覺得一個問題是小學老師的數學程度太差。這可能是因爲 — 相對於你一開始提到的 — 數學受到高度重視, 以至於那些當小學老師的人數學程度並不好, 否則他們可做其他工作來獲

得更高的薪水。事實上, 他們多數具備較好的文學、歷史和人文科學背景。還有另一個原因, 那就是教學數學的體系完全缺乏一致性。讓我們來談談小學教育, 通常是七到十歲或十一歲這個階段。一個核心問題是: 我們應該優先強調數字的基本操作練習, 還是解題的能力? 這種不一致性的結果是, 所謂的「課程綱要」— 也就是每位老師在某一年級必須教的內容 — 自從大概六〇年代以來, 幾乎每五年就改一次。這也是師資程度不佳的一個原因。他們不知道該教什麼, 而且他們教授的內容與他們學習數學的方式不一致。

林: 你有沒有想過給政府提供建議? 因爲在法國 $\cdots$

V: 我唯一的建議是, 應該提高小學和中學的老師的薪資; 如果提供好的薪水, 那麼有良好背景的人就會感興趣。當然, 你完全可以因爲熱愛而去當老師, 因爲這是一種很美好的職業, 是一種有意義的方式來賺取收入。但問題在於, 如果薪水低得離譜, 那麼誰還願意去做這份工作呢?

我自己不從事兒童教育的工作。當然, 我自己有孩子, 我也和他們一起做過數學, 但我認爲, 要以一種具建設性的方式和年幼的孩子一起學數學, 其實一點都不簡單。我有五個孩子, 最小的在我 35 歲那年出生, 所以大約在我 35 到 40 歲之間, 我曾和他們一起做些數學。

我很天真地以爲, 因爲我喜歡抽象的東西, 跟孩子討論邏輯, 例如集合論、解釋什麼是等價關係、可以拿它來做什麼, 這樣應該是最有趣的。但我很快發現, 這在教學上完全行不通。我的孩子在同樣的年紀, 反而在處理更具體的問題時表現得更好。例如, 如果我讓孩子們解決二元一次聯立方程的問題, 你去商店買了一個蛋糕和兩個可頌, 另一次買了一個可頌和三個蛋糕, 最後你得算出蛋糕和可頌各是多少錢。他們即使年紀還很小, 解這種問題都做得很好。他們的數學其實不錯。不過, 我認爲如果孩子太小, 他們的抽象能力還沒發展起來。我要說的是, 作爲一個職業的數學家, 我可能是最不適合去建議人們該怎麼教小孩數學的人。

李: 您提到過, CNRS 系統, 讓你能專注於研究, 而不需承擔教學任務及最少量的其他職責。這種系統似乎是法國特有的。我不曾看到其他地方具有如此規模的類似系統 $\cdots$

V: 我認爲有一些相仿的機構, 像是比利時的。

林: FNRS.

V: 我認爲在義大利, 也存在一些看起來有點類似、但不完全一樣的東西。

李: 在法國, 這是大規模的機構, 很多人受雇於 CNRS。在其他地方, 可能僅有少數人獲選擔任類似職位。

V: CNRS 是一個相當民主的機構, 他們會錄用初入行的年輕人。這確實是一個了不起的機構。誕生於法國 60 年代經濟情勢好轉、社會思潮更寬容的時期。我們能擁有它是非常幸運的。而且我必須說, CNRS 對於吸引女性投入數學也是非常有幫助的, 因爲我們的社會至今仍

普遍認爲女性應該多承擔家庭責任和育兒工作。就我和我丈夫而言, 我們總是非常平均地分擔家務, 但事實上, 懷孕這件事仍是女性面對的。再加上, 數學這個領域非常競爭激烈 — 即使我們不喜歡用這個詞, 但這是事實。如果你因爲懷孕失去九個月, 再加上一年照顧嬰兒, 然後有兩三個孩子, 這樣積累下來, 幾乎不可能留在跑道上。對我來說, 我認爲自己非常幸運。我未曾停止研究數學, 而這主要是因爲我在 CNRS。如果是去大學工作的話, 那會耗費我太多時間。所以我得以待在家中做研究, 這爲我保留了足夠的時間和精力。

我認爲這是力圖改善女性境況的人應該思考的。有時他們根本沒有做他們應該做的事情。他們聲稱將透過優先僱用女性來幫助女性。但當她們得到這個職位後, 她們卻有一種感覺, 覺得因爲自己是因性別因素而被聘用, 這不是很讓人愉快。更有幫助的是給她們更多自由、更多研究時間等; 這些都是非常簡單且實際的事情。這確實是女性所需要的。而且法國女子數學教育確實非常出色。我們有許多非常優秀的女數學家, 如果你去看, 大多數都曾進入過 CNRS。

林: 我認爲另一個相關的問題是如何招收更多的女學生。例如我們數學系, 今年只有兩名新生是女性。這也是個問題。

V: 我們面臨著同樣的問題。

林: 沒有學生, 未來就沒有研究人員。

V: 法國也有同樣的問題。在某種意義上, 這些問題並不是在高等教育階段才出現的, 而是一開始就存在了。女孩們逐漸從數學課堂中消失。在法國, 數學被視爲一種 — 怎麼說呢 — 選拔工具。從一開始, 甚至從小學就被呈現爲一種競爭性的東西。這對女孩來說已經是一個困難的起點。但事實上, 情況更糟糕。社會上存在一些關於女孩在科學, 特別是數學方面能力的刻板印象, 這些刻板印象與人們認爲「好女孩」應具備的特質有關。我認爲, 女孩在非常年幼的時候就已經開始學會如何取悅父母或社會, 這實在太可怕了。我有孫子女, 我看到我八歲的孫女, 已經出現這樣的情況了。

回到我一開始說的, 我需要一種「隱身」的狀態來做數學。因爲當你在從事數學研究時, 真的需要把整個世界隔絕在外, 專注於自己的內在。這種狀態完全與面對社會、取悅他人的想法相反。我認爲, 在對女孩的教育中, 她們更被引導去「取悅他人」, 包括外表上的討喜。甚至那種「必須要漂亮」的觀念, 簡直是一場惡夢。這意味著她們從小就被放在被他人觀看的處境中。對我來說, 這關乎她們如何看待自己。

林: 你會和你的孩子或他們的配偶分享這個觀點嗎?

V: 當然。你是問我作爲一位母親是怎樣的嗎?

林: 是的, 身爲母親。

V: 我們的孩子有些是數學家, 我的先生也是數學家。他是一位高水準的數學家。對我們而言, 知性生活是具有縱深的首要之務。我認爲我們確實向孩子傳達了這樣的理念: 知性成就塑造你的個性。這不僅適用於數學, 也不僅適用於現在已成爲專業數學家的孩子。我從來沒有太執著於孩子在學校的成功, 因爲當我還是孩子的時候, 在學校取得好成績並不是我的首要目標。我想要的只是想學習和進步。我不拘泥於體制。我未曾鼓勵我的孩子一味跟隨課程, 單是爲了成功而努力。更重要的是, 在各種活動中, 思考非常重要。舉例來說, 我記得那些活動不一定跟數學有關。在做數學之前, 你必須掌握語言。你需要了解如何構造嚴謹的句子, 不僅關乎語法, 還要合乎邏輯。我記得我們進行了大量練習。從某種意義上來說, 這是爲了好玩, 但很多遊戲都涉及語言。比如說, 我們在散步的時候, 有人, 可能是我, 也可能是我的一個孩子, 講一個故事, 而這個故事裡, 有一個矛盾。我們必須找到矛盾所在。或者另一個我認爲更接近數學的遊戲。你知道那些你爲孩子們讀的故事: 佩羅 (Perrault)、安徒生、華特迪士尼的故事等。我選擇其中一個著名的故事, 講了大致相同的故事, 但修改所有細節。三隻小豬變成了三姊妹, 並且細節、背景、情境都改變了。但故事情節、發展方式和結局都大同小異。孩子們必須辨認出這是哪個故事。這些東西很有趣, 但實際上非常接近數學。Poincaré曾說過: 數學, 是給看起來不同但運作方式相同的事物賦予相同名稱的藝術。從某種意義上說, 當我們玩這些語言遊戲時, 我們更接近數學而非文學。

林: 很多人可能已經請教過你這個問題了。在數學領域, 你是一位成功的數學家。除了數學之外, 在家庭方面, 你也同樣成功。你是如何在數學和生活之間取得平衡的? 能否和我們分享一下?

V: 事實上, 這個問題我被問過很多次。我的答案始終如一。對我來說, 撫育這個大家庭確實耗費了大量時間。然而, 我認爲這也給了我極大的幫助, 因爲在心理層面上, 我一直覺得數學很困難。有一些非常糟糕的時期, 靈感非常低落的時期, 對數學不那麼熱愛的時期。在這些時期, 我會覺得自己的工作表現不佳。而我的家庭恰好相反; 在我的家庭裡, 我總是覺得自己很堅強且過得很好。所以, 我認爲我的家庭讓我的個性更堅強。而對我來說, 數學有點破壞性, 因爲會面臨失敗和懷疑, 而且要面對很多非常聰明的人。因此, 對我而言這著實非常困難。當你在做數學時, 要感覺自己是在對的地方, 其實並不那麼容易。所以從某種意義上來說, 我從家庭獲得的信心, 比從數學獲得的更多。

李: 你有很多孩子, 對吧?

V: 是的, 五個

李: 要把他們撫育好, 需要付出很多努力。但你說, 你也從這些孩子身上獲得很多滿足和自信。

V: 是的, 我認爲這給了我所需的平衡。或者說, 我覺得 ⋯⋯ 我很幸運。這真的讓我成爲更平衡的人。我不認爲我的心理足夠強大, 可以只專注於數學, 並把我的一生都投入數學。

林: 在日常生活中, 除了數學, 你還喜歡做哪些事情?

V: 我大量閱讀。我讀小說, 重讀以前讀過的經典小說, 但也讀一些新書。現在可能年紀大了, 有時也會讀傳記或散文。此外, 我喜歡畫畫, 也喜歡繪圖, 也喜歡做泥塑。孩子們還在家的時候, 我和他們一起演奏音樂。他們都演奏得非常好。我跟著他們學音樂, 但起步太晚了, 並不盡如人意。我大概 35 歲左右才開始學小提琴, 從未能演奏出美妙的音色, 而這或許是演奏中最重要的部分。

我有許多喜歡做的事情。現在我不再玩音樂了, 因爲已經不再有孩子陪我玩了。但我還是會做一些手工活動。我也喜歡散步。我的嗜好不多, 但我擅長玩一款叫做「Bilboquet (劍球)」的遊戲。也許你甚至不知道這個名稱。

這聽起來很荒唐, 但這確實是一項經典遊戲。我想凱瑟琳·德·美第奇 (Catherine de Medici) 的一個兒子, 也許是查理九世, 非常喜歡這個遊戲。劍球遊戲當時非常流行。玩劍球遊戲時, 需要一根棍子和一個球, 球用繩子綁在棍子上。你要把球抬起來, 然後接住它 ···

林: 在日本, 我認爲有類似的東西, 叫做劍玉。

V: 不知爲何, 我非常擅長這個。這只是個玩笑。

林: 你是否喜歡有時在散步時思考數學?

V: 當然。這是我散步的主要原因。是的, 真的, 我住在巴黎, 我喜歡在巴黎散步。即使嘈雜, 也能讓我有更好的心情去思考數學, 比在森林或大自然看著樹木更好。在巴黎, 我快步行走。通常, 我喜歡帶著心中的問題行走。這非常令人愉快。散步很有幫助, 尤其是當你有非常具體的問題想要思考的時候。

林: 甚至技術性的問題? 或者你有做選擇 ···

V: 確實。如果你必須進行複雜的計算, 你就不會這麼做。最近我先生問了我一個關於曲面拓樸的小問題。只是 $\mathbb{R}^3$ 中的區域的拓樸而已。他問的是: 是否能夠僅用上同調的方式來刻劃邊界是球面的區域。我很高興自己的研究被打斷了。我開始在街上走。我了解到這是 Poincaré 對偶關於邊界流形的推論。它恰好給出了他想要的特徵刻畫。我先生從事分析工作。他進行大量計算, 寫啊寫啊寫。對他來說, 做數學就是坐在辦公桌前做很多計算。當然, 有一部分的工作需要想出一個策略, 但之後就是技術性的工作了。代數幾何則截然不同。大多數步驟都比較是概念性的, 沒有那麼多非常技術性的東西。有時你會在寫論文的時候才發現技術性的東西, 然後意識到某個引理並沒有你想像的那麼有用。事實上, 我確實花了很多時間在辦公桌外做數學工作。

李: 回到你剛才提到的, 你在巴黎高等師範學院的時候就開始考慮鑽研數學了。你是在什麼時候決定要專攻複幾何或代數幾何的? 是受到某位老師的啟發, 還是你自己喜歡?

V: 事實上, 並非一蹴而就, 因爲我真正發現各種不同幾何類型的時期, 是我們所謂的 M1、M2, 即 Master 1 和 Master 2 的時候, 在我讀博士之前。其中一年, 我選修了一門非常精采的黎曼幾何課程, 由幾年前過世的 Marcel Berger[1]教授。黎曼幾何讓我讚嘆。我還選修了一門由 Dan Burns 講授的 Kähler 幾何課程, 非常精彩。初識 Kähler 幾何時, 我深受震撼。我最初考慮研究辛幾何, 甚或是黎曼幾何。我曾與當時巴黎綜合理工學院的教授 Jean-Pierre Bourguignon 討論。最後, 巴黎高等師範學院的一位老師建議我與 Beauville 討論。這是非常好的建議, 因爲辛幾何涉及許多概念性的面向, 但分析仍然扮演重要角色。當然, 與黎曼幾何相比, 分析的作用要小一些, 但分析仍然很重要。例如, Donaldson 關於辛超曲面 (辛流形中餘維數爲 2 的辛子流形) 的存在性做了令人讚嘆的研究, 你閱讀時會發現建構它們需要大量的分析工作。所以, 我原本要做分析, 但自覺對此不擅長。Marie-France Vignéras 給了我一個非常好的建議, 告訴我代數幾何或許較適合我。確實, 我必須說, 我使用的所有方法都包含大量的代數。在霍奇 (Hodge) 理論中, 固然包含一些分析方面的面向, 但如果你看這些對象, 尤其是在處理霍奇結構的無窮小變化時, 就更是如此, 裡面有非常多代數。我喜歡幾何, 喜歡幾何結構, 但事實上, 當你研究代數幾何時, 最終的工具來自代數。我認爲, 從事該領域對我來說更爲穩妥。但我進入這個領域並非直截了當。我一直記得我當初對 Kähler 幾何的興趣。

林: 你當時是怎麼學代數幾何的?

V: 當時我讀了非常好的關於交換代數的書, 比如 Lang[2]、Atiyah-Macdonald[3]、Matsumura[4] 的著作。這些書奠定了我很好的交換代數基礎, 這是必要的。之後我讀了 Hartshorne[5] 的書[6], 花了一個夏天, 並且做了習題。之後我又讀了其他書, 但我認爲我在 Hartshorne 的書學到了很多東西。後來, 我讀了其他書, 例如 Mumford[7]的兩本書。一本是《代數幾何導論》, 書名也許不太準確, 它對我來說並沒有那麼大的說服力。至於另一本書, 有趣的是, 我覺得我從中學到了更多的代數幾何; 那是他關於阿貝爾多樣體的書。也許如果你已經有了 Hartshorne 的書, 那麼再讀一本入門教科書就不會帶給你太多新的東西。還有其他書可供

[1]Marcel Berger (1927∼2016), 法國數學家, 早年提出 $\frac{1}{4}$-pinching 球體定理, 研究涵蓋全純群的分類, 以及與愛因斯坦流形相關的各種不等式。1985 年至 1994 年擔任 IHES 所長。

[2]Serge Lang (1927∼2005), 法裔美國數學家, 在數論、代數和幾何學領域有優異研究。他是多產的數學教科書作者, 包括影響深遠的《*Algebra*》, Graduate texts in mathematics 211, Springer。

[3]*Introduction to Commutative Algebra*, by Michael Atiyah and Ian G. Macdonald, 1st edition, 1969; ebook edition, CRC press, 2018.

[4]Hideyuki Matsumura (松村英之, 1930∼1995), 日本數學家, 以其交換代數教科書 *Commutative Algebra*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980 而聞名。

[5]Robin Hartshorne (1938∼), 美國數學家, 任教於加州大學柏克萊分校, 他的著作《代數幾何》(*Algebraic Geometry*, 1977) 是該領域使用最廣泛的教科書之一, 影響深遠。他也對希爾伯特方案、充足子簇 (ample subvariety) 和變形理論的研究做出重要貢獻。

[6]*Algebraic Geometry*, New York: Springer-Verlag, 1977; corrected 6th printing, 1993. GTM 52

[7]David Mumford (1937-), 美國數學家, 哈佛大學暨布朗大學榮譽教授, 在代數幾何及電腦視覺領域有開創性成就。在代數幾何, 他對模空間的研究做出了重大貢獻, 將其用於對代數曲線進行分類, 並推動幾何不變量理論的發展, 1974年獲頒菲爾茲獎。在應用數學領域, 他對模式理論及影像處理做出貢獻。

選擇, 其中兩本特別重要: Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris[8]及 Barth-Peters-Van de Ven[9]。前者講的是曲線, 後者講的是曲面。當然, 這不是一般的代數幾何, 但實際上你在這些書中學到很多一般的方法。從某種意義上說, Hartshorne 在介紹概形理論、凝聚層 (coherent sheaves) 的上同調、甚至更進階的東西 (例如平坦性、平坦層的刻畫) 方面, 都非常出色。對我來說, 這真的是一本很精采的書, 但讀到最後, 你可能會覺得有點迷惑, 因爲你看不到代數多樣體是什麼樣子, 也不知道它能做什麼; 這本書主要是討論一般理論。

Kähler 幾何也有類似的門徑可以採用。在我的 Kähler 時期, 我讀了 André Weil[10]的法文版《 Introduction to Kähler Manifolds》[11]。這是一本非常出色的書, 他在書中介紹了霍奇理論、Kähler 恆等式和一些 Picard 群。讀完整本書, 你從頭到尾都沒遇到過任何一個緊緻的 Kähler 流形。這些書都非常出色。只是到後來, 我才讀了其他更多處理代數幾何物件的書。在同一時期, Griffiths[12]重要的論文也讓我受益良多。他在霍奇結構形變理論方面發表了一系列重要論文。另有一篇 Clemens[13]-Griffiths 合作的論文[14], 是一篇很長的論文, 從一類特殊的簇出發, 做了很多概括性的工作。這是關於三次三維體 (cubic threefold) 研究, 文章當時就已經提出了一個優美的想法: 看起來非常超越 (transcendental) 的霍奇理論, 實際上有代數幾何中的代數面向。後來, 著手於一般的霍奇結構時, 我發現物體具有非常超越的性質。但是, 仍有一整套關於霍奇結構的無窮小變化的論文, 這很值得注意, 因爲霍奇理論顯然具有一些超越面向, 你必須將你的複代數多樣體視爲一個拓樸對象, 考慮具有拓樸結構的複流形。於是你考慮它的 Betti 上同調, 但具有整數係數的 Betti 上同調不屬於代數幾何。這是真正超越 (transcendental) 的部分。帶有複係數的 Betti 上同調, 則可以從代數幾何中建構出來, 也就是代數 de Rham 上同調。

在霍奇理論中, 如果你只考慮霍奇濾鏈 (filtration), 那麼它來自代數幾何。霍奇理論實際上是超越 (transcendental) 考量與代數幾何考量的結合。當你做這方面的無窮小理論, 也就是觀察當你形變你的代數簇時, 霍奇濾鏈如何變化; 當然, 拓樸類型保持不變, 你只是變動霍奇濾鏈。那麼一個衆所皆知的事實是: 你獲得的資訊完全來自代數幾何。有很多代數與此有關, 例如 Torelli 定理。你可以從 Hodge 結構的無窮小變化, 甚至最後單靠 Hodge 結

[8] *Geometry of Algebraic Curves*: Volume I, by Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, Joseph Daniel Harris, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (GL, volume 267), 1985.

[9] *Compact Complex Surfaces*, by Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, Antonius Van de Ven, Springer, 1st edition, 1984, latest edition, 2004.

[10] André Weil, (1906∼1998), 法國數學家, 對解析數論及代數幾何有奠基性貢獻, 三十年代參與創建 Bourbaki 學派。他最著名的貢獻包括 Weil 猜想, 該猜想奠定了現代代數幾何的基礎。他也證明了 Mordell-Weil 定理, 該定理是橢圓曲線研究的基礎。

[11] Introduction à l’étude des Variétés Kählériennes, by André Weil, Hermann, 1958.

[12] Phillip Griffiths (1938∼), 美國數學家, 對霍奇理論做出重要貢獻, 尤其是在霍奇結構變體的研究方面。1991 至 2003 年擔任普林斯頓高等研究院院長。

[13] Charles Herbert Clemens (1939∼), 美國數學家, 曾在哥倫比亞大學、猶他大學和俄亥俄州立大學任教, 專攻複代數幾何。

[14] Charles Herbert Clemens and Phillip A. Griffiths (1972), “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Annals of Mathematics*, Second Series, 95 (2), 281-356.

構本身, 去重建原來的代數簇。這一切真的很迷人, 這些想法剛好都是我開始做數學的時候發展出來的, 大概是 1980 年代中期。我讀了所有這些論文。我的數學生涯初期, 其實就是深受 Hodge 結構無窮小變化的影響。我當時讀到這些都是很新的文章。

李: 你還寫了很多書, 包括關於霍奇結構的書[15]。既然你沒有教書的義務, 你何以決定寫這些書? 是否預期未來某個時候教這些書?

V: 我曾經教授過進階的代數幾何課程, 雖然並非每年都教。這本書是我教授兩年代數幾何課程的成果, 分爲初階與進階兩部分。每門課大約是 40 小時, 之後我把講課內容整理成書。不過我有時也會開代數幾何的課, 但沒有提供書面講義。而最近一次教授課程是在去年。這門課的內容是代數簇族的拓樸結構, 內容包括形變理論與霍奇結構變化中的一些重要結果, 包括德利涅 Deligne[16]關於族的拓樸性質的重要結果, 以及霍奇結構的一些無窮小變化。我之所以這樣做, 是因爲我認爲做些研究之外的事情對我有益。

林: 你也有很多數學著作。其中你最喜歡的是哪幾篇呢?

V: 我最喜歡的三項工作, 應該是關於小平 (Kodaira)[17] 問題的研究、接著是用退化法研究穩定非有理性的工作, 以及我最近與 Kollár[18] 的合作的研究。我喜歡這三項工作, 因爲它們都很優雅, 而且其實並沒有花太多功夫。只是剛好有一個想法, 而那個想法最後非常有效。前兩篇甚至是在很短的時間內就抓住並發展出這個想法。而最近與 Kollár 的工作花了我比較多時間, 但情況有所不同, 因爲我非常享受去思考一個簡單的問題。這是一個 60 年代的經典問題, 敘述起來很容易, 但要解決它, 你真的需要一個全新的想法。這個問題非常不同, 也讓我花了比較久的時間, 大概六個月才得出結論, 這最終要感謝 Kollár 的幫助。我很高興能夠去研究一個本質上並不複雜的問題。當然, 我的其他工作通常更具技術性。這就像一場硬仗, 有時甚至連報告起來都不那麼愉快, 因爲細節太繁瑣。但這也是我們這個領域的本質, 是必要的。不過這三項工作的優點在於它們的優雅和簡潔。

林: 我們是否可以說, 這三項工作的背後有個共同點, 就是代數閉鏈 (algebraic cycles)?

V: 是的, 但在這裡我們將討論我最大的挫折, 那就是關於代數閉鏈及霍奇理論這個主題。我剛才沒提到, 其實這正是 Griffiths 那些的論文的核心主題, 儘管當時他並沒有看清整個圖像。

---

[15] *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, by Claire Voisin, Cambridge University Press (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), vol.1, 2002, vol.2, 2003.

[16] Pierre Deligne (1944∼), 比利時數學家, 爲 Weil 猜想的證明做出重大貢獻, 對霍奇理論、模形式和伽羅瓦表示影響深遠。他的研究從根本上理解算術代數幾何的 motive、$L$ 函數、Shimura 簇等基本對象, 並將代數幾何的方法應用於三角和、線性微分方程及其單值化、有限群的表示和量化變形。他於 1978、2008、2013 年分別獲頒菲爾茲獎、沃爾夫獎及阿貝爾獎。

[17] 小平邦彥 (Kunihiko Kodaira, 1915∼1997), 日本數學家, 早年以調和積分理論推導出代數簇的小平消失定理等重要結果, 1954 年獲頒菲爾茲獎。之後他把調和分析應用到層上同調理論, 發展複結構的變形理論及複曲面的分類理論, 並對霍奇理論做出重大貢獻。

[18] János Kollár (1956∼), 匈牙利數學家, 任教於普林斯頓大學, 主要研究高維度雙有理幾何、簇上的有理曲線和模空間, 也研究算術問題、基本群、實代數幾何和組合學的應用。

後來, Mumford 和 Bloch[19]也做出了一些非常重要的貢獻。我們逐漸看到了霍奇理論和代數閉鏈相互作用的圖景, 它們應該完美地相互作用, 因爲代數閉鏈的複雜性應該反映在霍奇結構的複雜性中。霍奇結構只是一個線性代數上的對象, 它的複雜度本質上是它的「長度」, 是我們稱之爲霍奇結構的層級, 這是指在 Hodge 分解中出現多少不同的 $H^{p,q}$。因此這是一個可以計算的複雜度。而如果你相信 Grothendieck[20] 的廣義霍奇猜想以及更晚一點的 Bloch 和 Beilinson[21]的猜想, 那麼這個來自霍奇理論的複雜性, 應該能控制周群 (Chow group) 的大小。

最簡單的表述通常是這樣的: 取一個光滑的射影多樣體, 如果它沒有正次數的非零全純微分形式 — 也就是說對所有正整數 $i$ 都有 $H^{i,0} = 0$ — 那麼這個多樣體應該具有平凡的 $CH_0$ 群; 所有的點都是有理等價的。這基本上就是 Bloch 猜想。這個猜想至今仍然難以攻克。Ayoub[22]曾宣布取得重大進展, 但在某個階段仍陷入停滯。因爲 $H^{i,0} = 0$, Hodge 結構看起來像 $H^{i,1}$ 加上 $H^{i-1,2}$ 等等, 但沒有最邊緣的項。目前有一個 Grothendieck 提出的大猜想, 這是霍奇猜想的一個非常重要的推廣, 它告訴我們該上同調應該支撐在某個除子 (divisor) 上。而且, 類似地, 你可以想像這樣的推廣: 如果你的霍奇結構僅從 $H^{i,2}$ 開始, 也就是你沒有 $H^{i,0}$、$H^{i,1}$, 從 $H^{i,2}$ 開始往後延續, 那麼這個上同調應該是支撐在某個餘維數爲 2 的封閉代數子集上。

這個猜想目前毫無進展。我認爲它比霍奇猜想更重要, 因爲霍奇猜想的問題在於, 最終只有相對少數有趣的簇擁有霍奇類。對於很多代數簇來說, 我們說霍奇猜想成立, 只是因爲除了那些顯而易見的霍奇類之外, 沒有其他霍奇類。但如果你去看 Grothendieck 廣義霍奇猜想, 即使是對於超曲面, 也有許多例子我們仍然無法判定。對於在投影空間中的低次超曲面, 我們已經知道如何計算這種複雜度, 即霍奇結構的層級。這要歸功於 Griffiths 的工作。在這種情況下, 廣義霍奇猜想仍然毫無進展。這是我在數學上最大的挫折。這也反映出一個事實: 代數幾何是一套驚人的理論體系, 從 Grothendieck 時代開始建構, 之後又有許多發展, 例如 $K$-理論、導出代數幾何等等。我們有非常多美麗的理論, 但這些理論卻沒有提供具體的構造工具。對於代數簇, 目前其實沒有什麼構造工具。很有趣的是, 大約十年前, 這個領域有兩個主要的猜想: 廣義霍奇猜想和廣義 Bloch 猜想, 兩者都和霍奇結構的形狀有關。對於這些低次的超曲面 — 如果能知道它們符合這些猜想我會非常非常高興 — 我證明了這兩個猜想是等價的。也就是說, 如果你知道廣義霍奇猜想成立, 那麼你也知道 Bloch 所

---

[19] Spencer Bloch (1944∼), 美國數學家, 任教於芝加哥大學, 對代數幾何和代數 $K$ 理論有重大貢獻。透過引入 Bloch 群和 Bloch 的高階周群, 他在代數閉鏈的研究獲致重大進展。

[20] Alexander Grothendieck (1928∼2014), 德國出生的法國數學家, 透過將交換代數、同調代數、層論和範疇論納入基礎, 擴展了代數幾何。他的“相對”觀點導致了純數學的突破性進步, 徹底改變了代數幾何。1966 年獲頒菲爾茲獎, 後來離開數學界, 在庇里牛斯山脈隱居度過了人生的最後幾年。

[21] Alexander A. Beilinson (1957∼), 俄裔美國數學家, 任教於芝加哥大學, 對代數幾何、表示論及數學物理領域, 特別是 motive 上同調、代數 $K$ 理論和幾何朗蘭茲綱領有傑出貢獻。

[22] Joseph Ayoub (1980∼), 法國數學家, 任教於蘇黎世大學, 主要研究 Weil 上同調理論、motive 的伽羅瓦群及相關主題。他的工作對代數幾何中的 motive 的理解做出了重大貢獻。

預測的消失性成立。所以我覺得這個主題讓人極度困惑: 我清楚知道哪些事情應該是對的, 這些事情又由這些宏大的等價猜想所支撐, 但即便是對於我自己相當熟悉的例子, 我仍然無法解決它們。

李: 謝謝你, Claire, 慷慨地與我們分享你的想法。謝謝你, 學庸。我們的時間不多了。非常感謝。

—本文訪問者李元斌任職於中央研究院數學研究所, 林學庸任教國立臺灣大學數學系暨研究所—